ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΑΘΗΝΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
Τμήμα Πολιτικών Έργων Υποδομής

Μάθημα: **Στατική ΙΙ** 3 Ιουλίου 2012
Διδάσκων: Τριαντ. Κόκκινος, Ph.D.

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

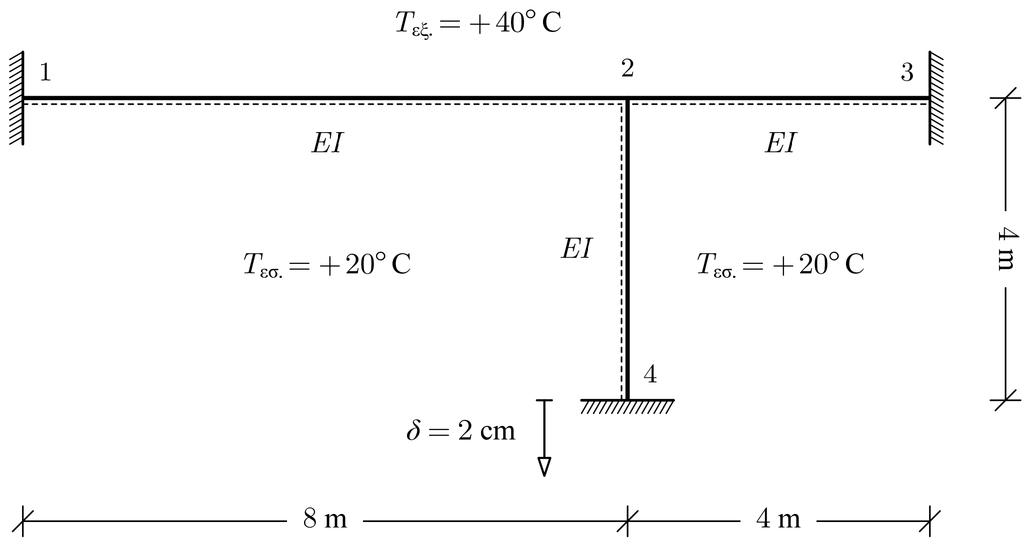
ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

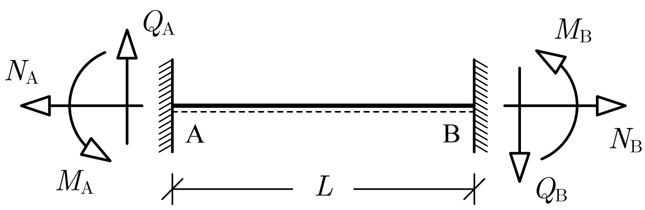
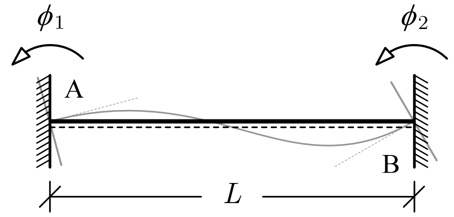
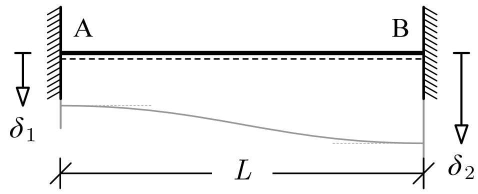
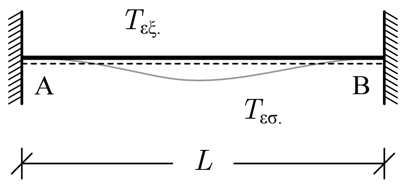
(1^{η} περίοδος εαρινού εξαμήνου 2011-12)

ΘΕΜΑ 1ο (30%)

Ο υπερστατικός φορέας του σχήματος καταπονείται από θερμικά φορτία και υποχώρηση της στήριξης στον κόμβο #4. Το εξωτερικό περιβάλλον του φορέα βρίσκεται σε θερμοκρασία $T_{\text{εξ.}} = 40^\circ\,\text{C}$, ενώ ο εσωτερικός χώρος σε θερμοκρασία $T_{\text{εσ.}} = 20^\circ\,\text{C}$. Η πάκτωση #4 υποχωρεί κατά $\delta = 2\,\text{cm}$. Τα τρία μέλη του φορέα έχουν την ίδια διατομή ύψους $h = 20\,\text{cm}$, το ίδιο μέτρο ελαστικότητας με $EI = 8\times10^4\,\text{kNm}^2$ και για όλα ο συντελεστής θερμικής διαστολής δίνεται $\alpha = 10^{-5}\,(\text{°C})^{-1}$. Να επιλυθεί ο φορέας χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των παραμορφώσεων και συγκεκριμένα:

(α) Να υπολογισθούν οι καμπτικές ροπές στα άκρα των τριών μελών του φορέα.
(β) Να υπολογισθούν οι αντιδράσεις στις στηρίξεις του φορέα.
(γ) Να σχεδιασθεί το διάγραμμα ροπών του φορέα.



<table>
<tr><td>ΑΚΡΑΙΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ ΑΜΦΙΠΑΚΤΩΝ ΔΟΚΩΝ</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$$M_A = \frac{2EI}{L}\left(2\phi_1 + \phi_2\right), \quad Q_A = \frac{6EI}{L^2}\left(\phi_1 + \phi_2\right)$$
$$M_B = \frac{2EI}{L}\left(\phi_1 + 2\phi_2\right), \quad Q_B = \frac{6EI}{L^2}\left(\phi_1 + \phi_2\right)$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$$M_A = \frac{6EI}{L^2}\left(\delta_2 - \delta_1\right), \quad Q_A = \frac{12EI}{L^3}\left(\delta_2 - \delta_1\right)$$
$$M_B = \frac{6EI}{L^2}\left(\delta_2 - \delta_1\right), \quad Q_B = \frac{12EI}{L^3}\left(\delta_2 - \delta_1\right)$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$$M_A = \frac{\alpha EI}{h}\delta T\,, \qquad M_B = -\frac{\alpha EI}{h}\delta T$$
$$\delta T = T_{εσ.} - T_{εξ.}$$</td></tr>
</table>

<u>Επίλυση:</u>

Άγνωστο μέγεθος παραμόρφωσης είναι η στροφή ϕ στον κόμβο #2 (αριστερόστροφη).

<u>Μέλος 1-2:</u>

$$M_{12} = \frac{2EI}{8}\phi + \frac{6EI}{8^2}0.02 + \frac{10^{-5}EI}{0.20}\left(20-40\right) \Rightarrow M_{12} = \frac{EI}{4}\phi + \frac{3EI}{1600} - \frac{EI}{1000} \tag{1α}$$

$$M_{21} = \frac{4EI}{8}\phi + \frac{6EI}{8^2}0.02 - \frac{10^{-5}EI}{0.20}\left(20-40\right) \Rightarrow M_{21} = \frac{EI}{2}\phi + \frac{3EI}{1600} + \frac{EI}{1000} \tag{1β}$$

$$Q_{12} = \frac{6EI}{8^2}\phi + \frac{12EI}{8^3}0.02 \Rightarrow Q_{12} = \frac{3EI}{32}\phi + \frac{3EI}{6400} \tag{1γ}$$

$$Q_{21} = \frac{6EI}{8^2}\phi + \frac{12EI}{8^3}0.02 \Rightarrow Q_{21} = \frac{3EI}{32}\phi + \frac{3EI}{6400} \tag{1δ}$$

Μέλος 2-3:

$$M_{23} = \frac{4EI}{4}\phi - \frac{6EI}{4^2}0.02 + \frac{10^{-5}EI}{0.20}\left(20-40\right) \quad \Rightarrow \quad M_{23} = EI\phi - \frac{3EI}{400} - \frac{EI}{1000} \qquad (2α)$$

$$M_{32} = \frac{2EI}{4}\phi - \frac{6EI}{4^2}0.02 - \frac{10^{-5}EI}{0.20}\left(20-40\right) \quad \Rightarrow \quad M_{32} = \frac{EI}{2}\phi - \frac{3EI}{400} + \frac{EI}{1000} \qquad (2β)$$

$$Q_{23} = \frac{6EI}{4^2}\phi - \frac{12EI}{4^3}0.02 \quad \Rightarrow \quad Q_{23} = \frac{3EI}{8}\phi - \frac{3EI}{800} \qquad (2γ)$$

$$Q_{32} = \frac{6EI}{4^2}\phi - \frac{12EI}{4^3}0.02 \quad \Rightarrow \quad Q_{32} = \frac{3EI}{8}\phi - \frac{3EI}{800} \qquad (2δ)$$

Μέλος 2-4:

$$M_{24} = \frac{4EI}{4}\phi + \frac{10^{-5}EI}{0.20}\left(20-20\right) \quad \Rightarrow \quad M_{24} = EI\phi \qquad (3α)$$

$$M_{42} = \frac{2EI}{4}\phi - \frac{10^{-5}EI}{0.20}\left(20-20\right) \quad \Rightarrow \quad M_{42} = \frac{EI}{2}\phi \qquad (3β)$$

$$Q_{24} = \frac{6EI}{4^2}\phi \quad \Rightarrow \quad Q_{24} = \frac{3EI}{8}\phi \qquad (3γ)$$

$$Q_{42} = \frac{6EI}{4^2}\phi \quad \Rightarrow \quad Q_{42} = \frac{3EI}{8}\phi \qquad (3δ)$$

Προσδιορισμός της άγνωστης στροφής:

Η άγνωστη ϕ υπολογίζεται από την ισορροπία των ροπών στον κόμβο #2. Η εξίσωση αυτή γράφεται ως εξής:

$$\Sigma M_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{21} + M_{23} + M_{24} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{EI}{2}\phi + \frac{3EI}{1600} + \frac{EI}{1000}\right) + \left(EI\phi - \frac{3EI}{400} - \frac{EI}{1000}\right) + \left(EI\phi\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5EI}{2}\phi + \frac{3EI}{1600} - \frac{3EI}{400} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{9}{4000} = 0.00225\,\text{rad} \qquad (4)$$

Γνωρίζοντας πλέον τη στροφή μπορούν να προσδιορισθούν τα ακραία εντατικά μεγέθη των μελών του φορέα αντικαθιστώντας τη τιμή της στροφής στις Εξ. (1), (2) και (3).

Υπολογισμός των ακραίων εντατικών μεγεθών των μελών του φορέα

Μέλος 1-2:

$$M_{12} = \frac{EI}{4}\frac{9}{4000} + \frac{3EI}{1600} - \frac{EI}{1000} \quad \Rightarrow \quad M_{12} = \frac{23}{16000} 8\times 10^4$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_{12} = 115\,\text{kNm}} \tag{5α}$$

$$M_{21} = \frac{EI}{2}\frac{9}{4000} + \frac{3EI}{1600} + \frac{EI}{1000} \quad \Rightarrow \quad M_{21} = \frac{32}{8000} 8\times 10^4$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_{21} = 320\,\text{kNm}} \tag{5β}$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{3EI}{32}\frac{9}{4000} + \frac{3EI}{6400} \quad \Rightarrow \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{87}{128000} 8\times 10^4$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q_{12} = Q_{21} = 54.375\,\text{kN}} \tag{5γ}$$

Μέλος 2-3:

$$M_{23} = EI\frac{9}{4000} - \frac{3EI}{400} - \frac{EI}{1000} \quad \Rightarrow \quad M_{23} = -\frac{25}{4000} 8\times 10^4$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_{23} = -500\,\text{kNm}} \tag{6α}$$

$$M_{32} = \frac{EI}{2}\frac{9}{4000} - \frac{3EI}{400} + \frac{EI}{1000} \quad \Rightarrow \quad M_{32} = -\frac{43}{8000} 8\times 10^4$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_{32} = -430\,\text{kNm}} \tag{6β}$$

$$Q_{23} = Q_{32} = \frac{3EI}{8}\frac{9}{4000} - \frac{3EI}{800} \quad \Rightarrow \quad Q_{23} = Q_{32} = -\frac{93}{32000} 8\times 10^4$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q_{23} = Q_{32} = -232.5\,\text{kN}} \tag{6γ}$$

Μέλος 2-4:

$$M_{24} = EI\frac{9}{4000} \quad \Rightarrow \quad M_{24} = 8\times 10^4 \frac{9}{4000} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{24} = 180\,\text{kNm}} \tag{7α}$$

$$M_{42} = \frac{EI}{2}\frac{9}{4000} \quad \Rightarrow \quad M_{42} = \frac{8\times 10^4}{2}\frac{9}{4000} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{42} = 90\,\text{kNm}} \tag{7β}$$

$$Q_{24} = Q_{42} = \frac{3EI}{8}\frac{9}{4000} \quad \Rightarrow \quad Q_{24} = Q_{42} = \frac{27}{32000} 8\times 10^4$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q_{24} = Q_{42} = 67.5\,\text{kN}} \qquad (7\gamma)$$

Ισορροπία του κόμβου #2:

$$\Sigma M_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{21} + M_{23} + M_{24} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 320\,\text{kNm} + \left(-500\,\text{kNm}\right) + 180\,\text{kNm} = 0 \quad \checkmark \qquad (8\alpha)$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{21} - Q_{23} - N_{24} = 0 \quad \Rightarrow \quad 54.375\,\text{kN} - \left(-232.5\,\text{kN}\right) + R_{y4} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 54.375\,\text{kN} - \left(-232.5\,\text{kN}\right) + R_{y4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{y4} = -286.875\,\text{kN}} \qquad (8\beta)$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -N_{21} + N_{23} - Q_{24} = 0 \quad \Rightarrow \quad -N_{21} + N_{23} - 67.5\,\text{kN} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -N_{21} + N_{23} = 67.5\,\text{kN} \qquad (8\gamma)$$

Ισορροπία ολόκληρου του φορέα (εναλλακτικός τρόπος προσδιορισμού R_{y4}):

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -N_{12} + N_{32} - Q_{42} = 0 \quad \Rightarrow \quad -N_{21} + N_{23} - 67.5\,\text{kN} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -N_{21} + N_{23} = 67.5\,\text{kN} \quad \checkmark \qquad (9\alpha)$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{12} - Q_{32} + R_{y4} = 0 \quad \Rightarrow \quad 54.375\,\text{kN} - \left(-232.5\,\text{kN}\right) + R_{y4} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 54.375\,\text{kN} - \left(-232.5\,\text{kN}\right) + R_{y4} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R_{y4} = -286.875\,\text{kN}} \quad \checkmark \qquad (9\beta)$$

$$\Sigma M_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{12} + M_{32} + M_{42} + 8\,\text{m}\cdot R_{y4} - 4\,\text{m}\cdot Q_{42} - 12\,\text{m}\cdot Q_{32} = 0$$

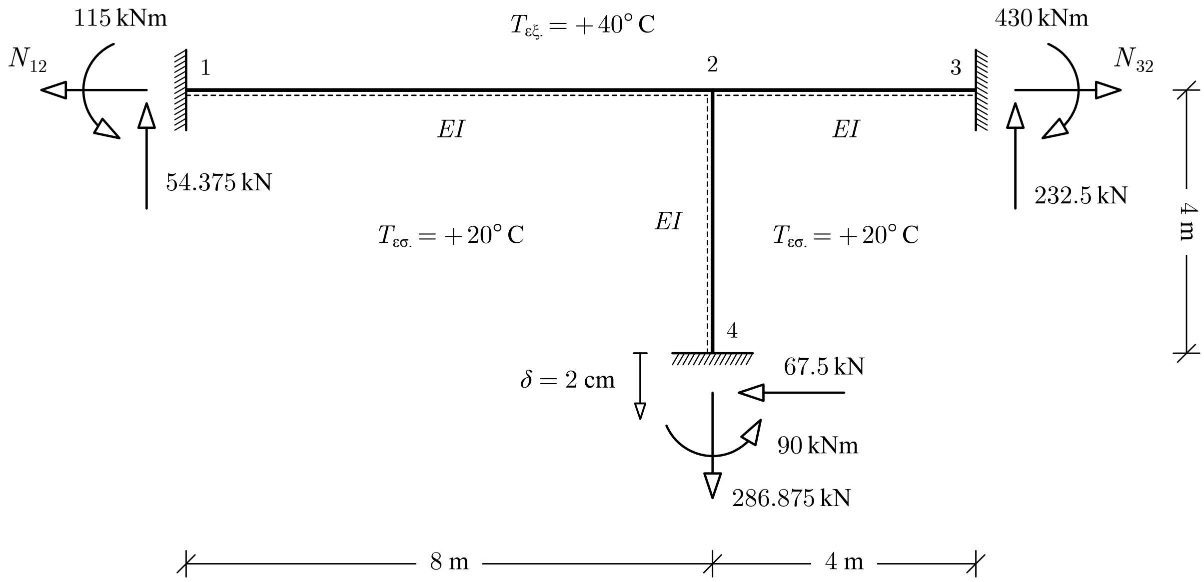
$$\Rightarrow \quad 115\,\text{kNm} + \left(-430\,\text{kNm}\right) + 90\,\text{kNm} + 8\,\text{m}\cdot\left(-286.875\,\text{kN}\right)$$

$$-4\,\text{m}\cdot 67.5\,\text{kN} - 12\,\text{m}\cdot\left(-232.5\,\text{kN}\right) = 0$$

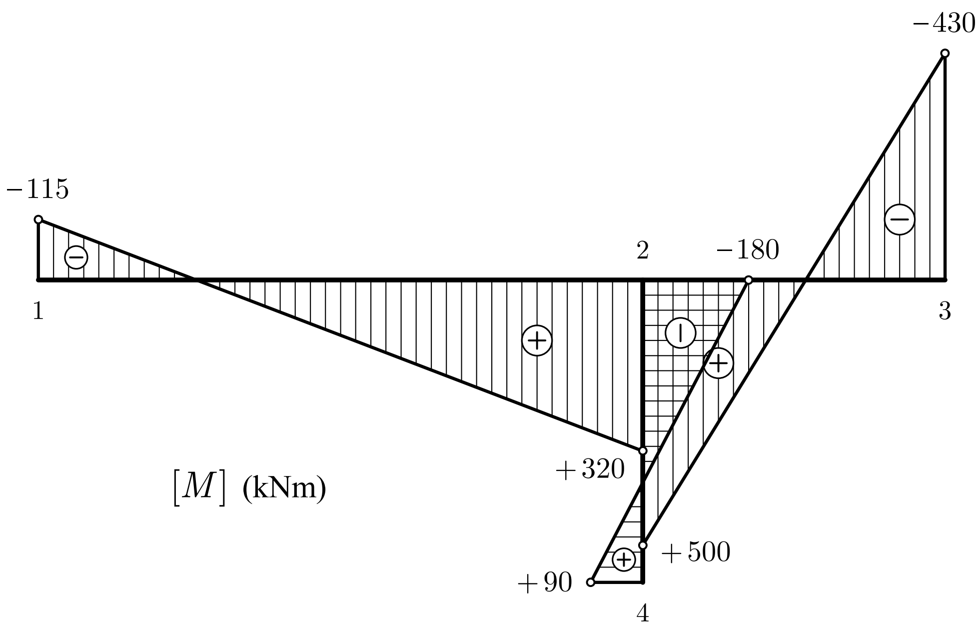
$$\Rightarrow \quad \left(115 - 430 + 90 - 2295 - 270 + 2790\right)\text{kNm} = 0 \quad \checkmark \qquad (9\gamma)$$

Ο υπολογισμός των αξονικών δυνάμεων των μελών 1-2 και 2-3 δεν είναι δυνατόν να επιτευχθεί, εφόσον εξ αρχής θεωρήθηκε ότι η αξονική παραμόρφωση των μελών του φορέα είναι αμελητέα και επιπλέον επειδή τα μέλη 1-2 και 2-3 είναι πάνω στην ίδια ευθεία. Συνεπώς, στην παρούσα κατάσταση προσδιορίζεται μόνο μία σχέση μεταξύ των N_{21} και N_{23}, όπως αυτή που δίνεται στην Εξ. (8γ) και επαληθεύθηκε με την Εξ. (9α).

Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος του φορέα



Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών του φορέα

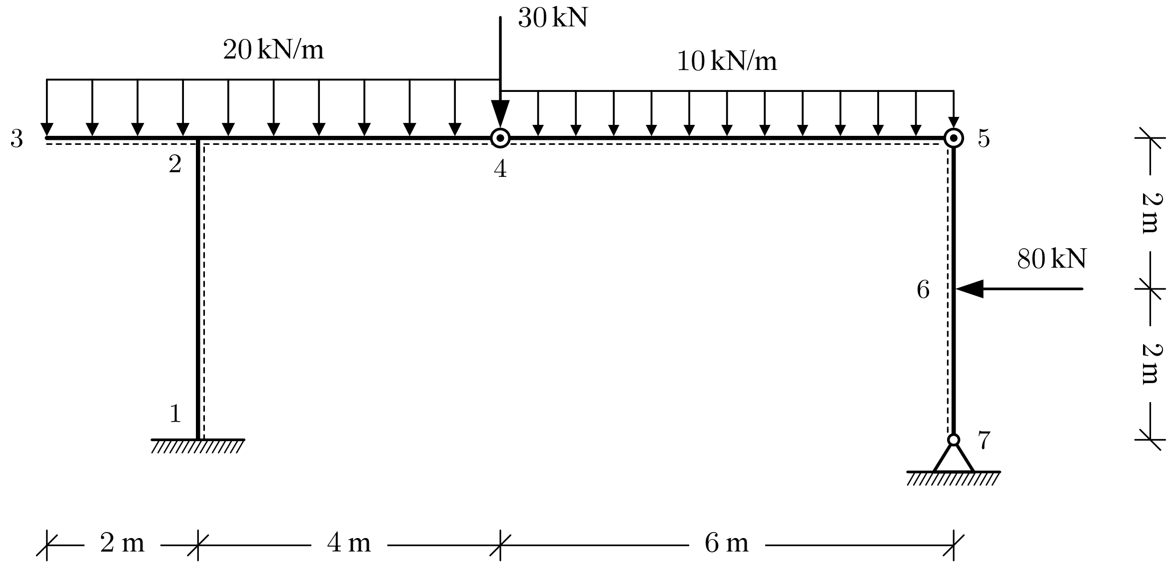


ΘΕΜΑ 2ο (45%)

(1) Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα αξονικών δυνάμεων [N], τεμνουσών δυνάμεων [Q] και καμπτικών ροπών [M] του παρακάτω πλαισιωτού φορέα. Να υπολογισθούν οι τιμές και οι αντίστοιχες θέσεις της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης (δύο τιμές).

(2) Επιπλέον, ζητείται να προσδιορισθεί η βύθιση w_4 της άρθρωσης #4 εάν δίνεται ότι τα μέλη του φορέα έχουν μέτρο ελαστικότητας $E = 2 \times 10^8\ \text{kN/m}^2$ και διατομή με πλάτος $b = 30\,\text{cm}$ και ύψος $h = 40\,\text{cm}$.

$$w \cdot 1\,\text{kN} = \int_0^\ell \frac{M\bar{M}}{EI}\,dx \qquad \text{και} \qquad \phi \cdot 1\,\text{kNm} = \int_0^\ell \frac{M\bar{M}}{EI}\,dx$$



Επίλυση:

Οι αντιδράσεις του φορέα προσδιορίζονται από τις τρεις εξισώσεις ισορροπίας του φορέα και τις δύο εξισώσεις μηδενισμού της καμπτικής ροπής στις αρθρώσεις των κόμβων #4 και #5 (η φορά των αντιδράσεων δίνεται στο επόμενο σχήμα):

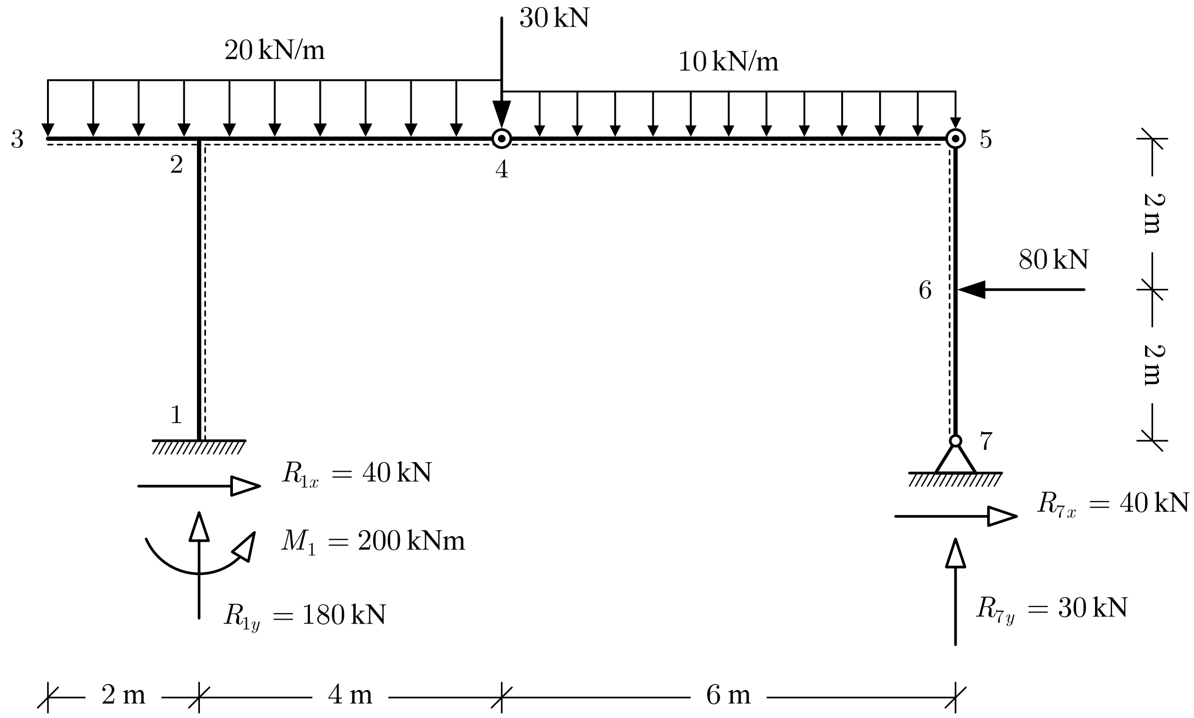
$$\circlearrowleft \Sigma M_5^{\text{κάτω}} = 0 \;\Rightarrow\; R_{7x} \cdot 4\,\text{m} - 80\,\text{kN} \cdot 2\,\text{m} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{R_{7x} = 40\,\text{kN}} \quad (1)$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_4^{\text{δεξιά}} = 0 \;\Rightarrow\; R_{7y} \cdot 6\,\text{m} + R_{7x} \cdot 4\,\text{m} - 80\,\text{kN} \cdot 2\,\text{m} - \left(10\,\text{kN/m} \cdot 6\,\text{m}\right) \cdot 3\,\text{m} = 0$$

$$\Rightarrow\; 6R_{7y} + 160\,\text{kN} - 160\,\text{kN} - 180\,\text{kN} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{R_{7y} = 30\,\text{kN}} \quad (2)$$

$$\Sigma F_x = 0 \;\Rightarrow\; R_{1x} + R_{7x} - 80\,\text{kN} = 0 \;\Rightarrow\; R_{1x} + 40\,\text{kN} - 80\,\text{kN} = 0$$

$$\Rightarrow\; \boxed{R_{1x} = 40\,\text{kN}} \quad (3)$$



$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{1y} + R_{7y} - 30\,\mathrm{kN} - 20\,\mathrm{kN/m}\cdot 6\,\mathrm{m} - 10\,\mathrm{kN/m}\cdot 6\,\mathrm{m} = 0$$

$$\Rightarrow \quad R_{1y} + 30\,\mathrm{kN} - 30\,\mathrm{kN} - 120\,\mathrm{kN} - 60\,\mathrm{kN} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{1y} = 180\,\mathrm{kN}} \tag{4}$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_1 + R_{7y}\cdot 10\,\mathrm{m} - 30\,\mathrm{kN}\cdot 4\,\mathrm{m} + 80\,\mathrm{kN}\cdot 2\,\mathrm{m} - \left(20\,\mathrm{kN/m}\cdot 6\,\mathrm{m}\right)\cdot 1\,\mathrm{m}$$

$$- \left(10\,\mathrm{kN/m}\cdot 6\,\mathrm{m}\right)\cdot 7\,\mathrm{m} = 0$$

$$\Rightarrow \quad M_1 + 300\,\mathrm{kNm} - 120\,\mathrm{kNm} + 160\,\mathrm{kNm} - 120\,\mathrm{kNm} - 420\,\mathrm{kNm} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_1 = 200\,\mathrm{kNm}} \tag{5}$$

Ένας έλεγχος των αποτελεσμάτων μπορεί να γίνει παίρνοντας για παράδειγμα ισορροπία ροπών σε κάποιο άλλο σημείο του φορέα ή μηδενίζοντας τη ροπή στις αρθρώσεις για το τμήμα του φορέα που δεν χρησιμοποιήθηκε στις Εξ. (1) και (2). Για το σκοπό αυτό επιλέγεται η εξίσωση ισορροπίας ροπών όλου του φορέα στο κόμβο #2:

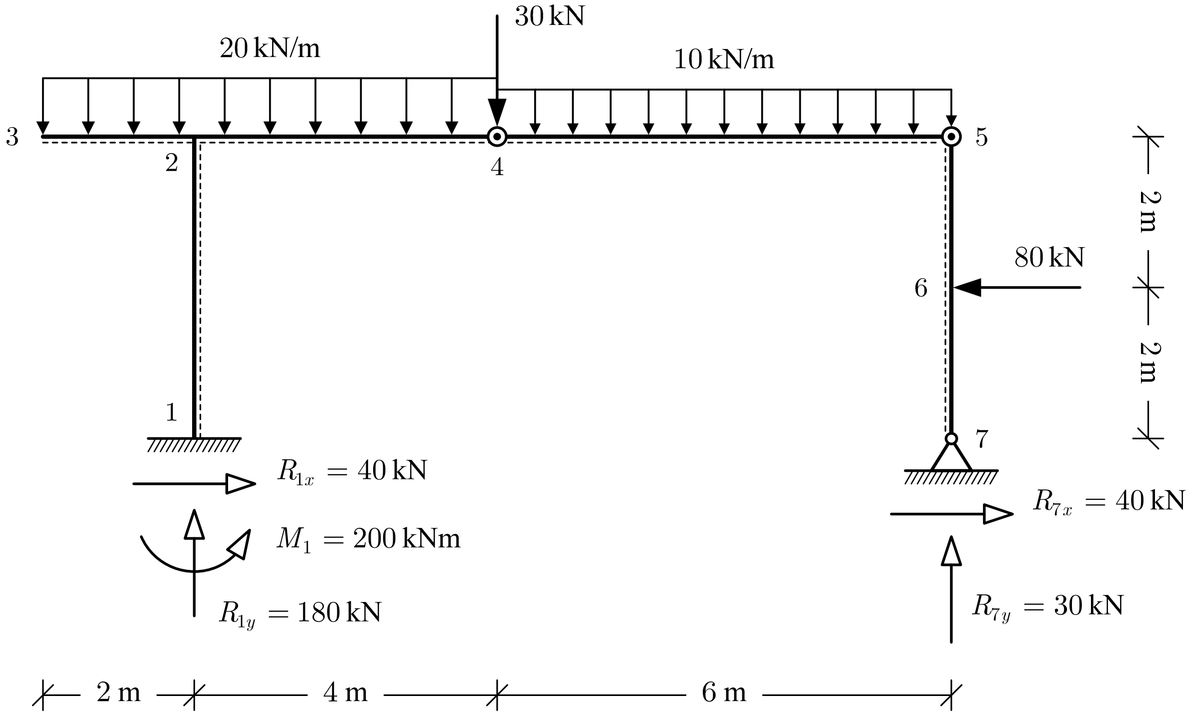
$$\circlearrowleft \Sigma M_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_1 + R_{1x}\cdot 4\,\mathrm{m} + R_{7y}\cdot 10\,\mathrm{m} + R_{7x}\cdot 4\,\mathrm{m} - 30\,\mathrm{kN}\cdot 4\,\mathrm{m} - 80\,\mathrm{kN}\cdot 2\,\mathrm{m}$$

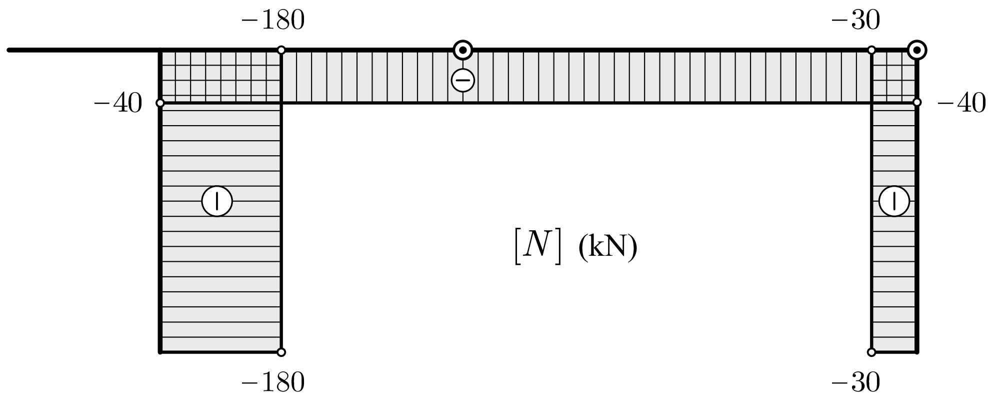
$$- \left(20\,\mathrm{kN/m}\cdot 6\,\mathrm{m}\right)\cdot 1\,\mathrm{m} - \left(10\,\mathrm{kN/m}\cdot 6\,\mathrm{m}\right)\cdot 7\,\mathrm{m} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 200 + 160 + 300 + 160 - 120 - 160 - 120 - 420 = 0$$

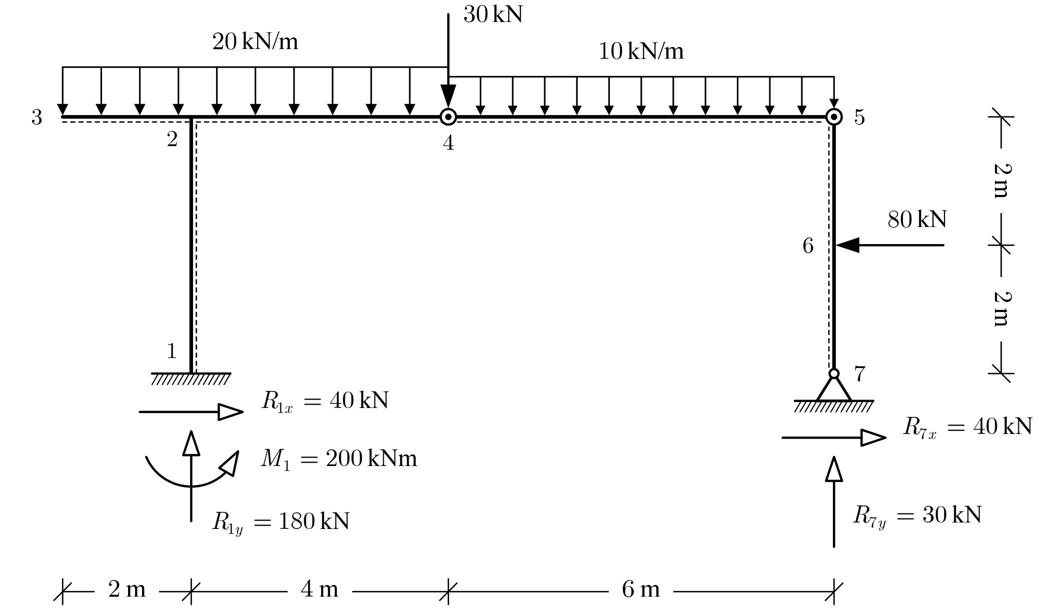
$$\Rightarrow \quad 820 - 820 = 0 \quad \checkmark \tag{6}$$

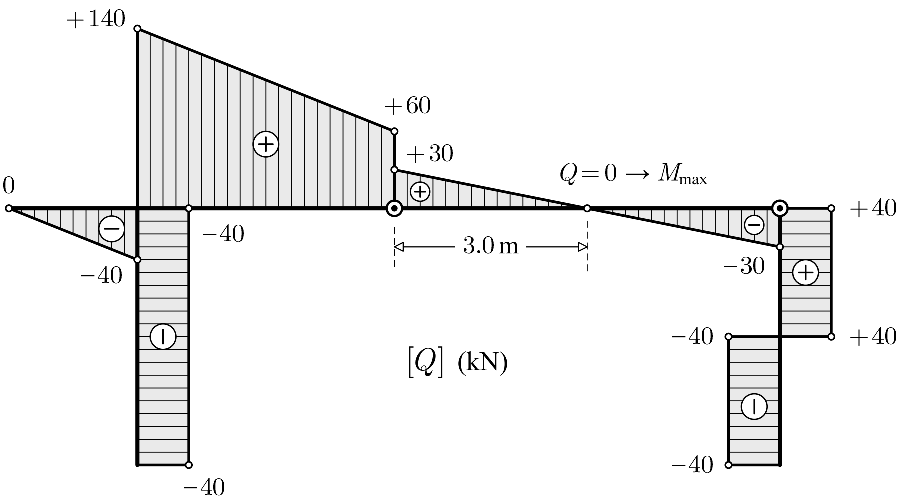
Διάγραμμα Αξονικών Δυνάμεων του φορέα

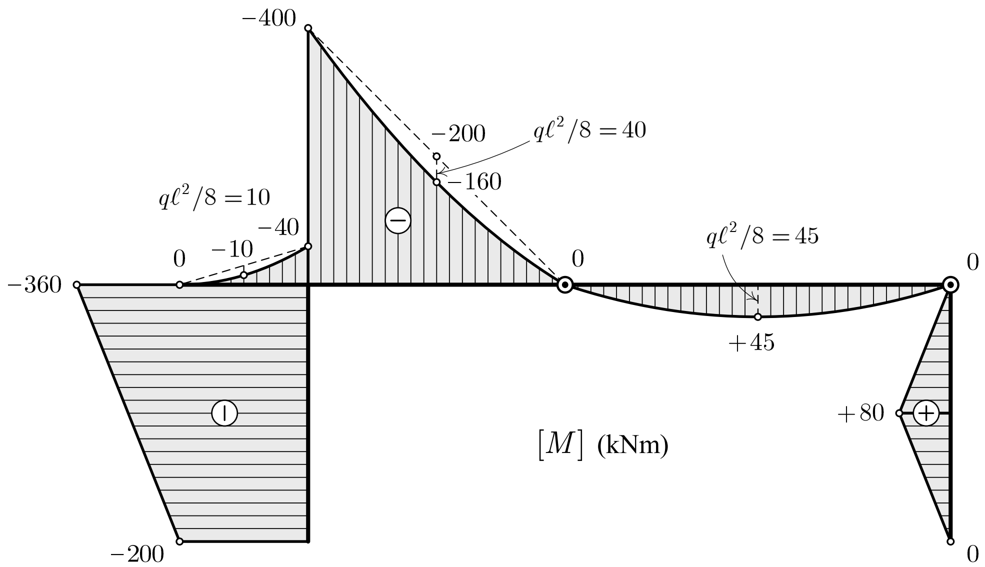




Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων και Καμπτικών Ροπών του φορέα





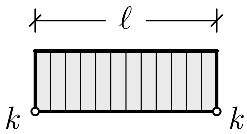
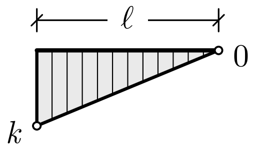
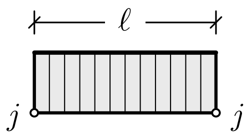
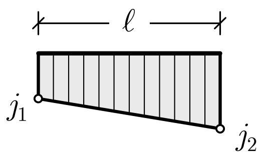
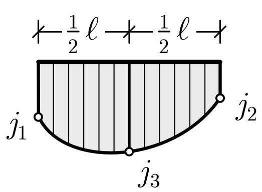


Όπως φαίνεται και από το διάγραμμα ροπών του φορέα, τα σημεία στα οποία εμφανίζεται τοπικά μέγιστη θετική ροπή κάμψης είναι το μέσον του τμήματος 4-5 και ο κόμβος #6, με τιμές $45\,\mathrm{kNm}$ και $80\,\mathrm{kNm}$, αντίστοιχα.

Ζητείται επίσης να προσδιορισθεί η βύθιση w_4 της άρθρωσης #4 όταν τα μέλη του φορέα έχουν μέτρο ελαστικότητας $E = 2\times 10^8\ \mathrm{kN/m^2}$ και διατομή πλάτους $b = 30\,\mathrm{cm}$ και ύψους $h = 40\,\mathrm{cm}$. Η ζητούμενη αυτή παραμόρφωση θα υπολογισθεί με τη *μέθοδο του μοναδιαίου φορτίου* (*Αρχή Δυνατών Έργων*), σύμφωνα με την οποία προκειμένου να προσδιορισθεί η εγκάρσια μετατόπιση του κόμβου #4 (βύθιση) επιβάλλεται στο φορέα μοναδιαία δύναμη στο σημείο αυτό και με διεύθυνση αυτή της ζητούμενης μετατόπισης, δηλαδή εγκάρσια. Η σχέση υπολογισμού της μετατόπισης είναι:

$$w_4 \cdot 1\,\mathrm{kN} = \int_0^\ell \frac{M\bar{M}}{EI}dx = \frac{1}{EI}\int_0^\ell M\bar{M}dx \tag{7}$$

στην οποία M είναι το διάγραμμα ροπών του φορέα για τη δεδομένη φόρτιση του φορέα και $\bar{M}$ το διάγραμμα ροπών για εγκάρσιο μοναδιαίο φορτίο στον κόμβο #4. Τα ολοκληρώματα των γινομένων των ροπών για κάθε τμήμα του φορέα προσδιορίζονται από τον πίνακα που ακολουθεί και ο οποίος δίνεται στην εκφώνηση του προβλήματος.

Τιμές ολοκληρωμάτων $\int_0^\ell M_j M_k\,dx$		
M_k / M_j		
	$\ell\, j k$	$\ell\, \frac{1}{2} j k$
	$\ell\, \frac{1}{2} k\big(j_1 + j_2\big)$	$\ell\, \frac{1}{6} k\big(2j_1 + j_2\big)$
	$\ell\, \frac{1}{6} k\big(j_1 + 4j_3 + j_2\big)$	$\ell\, \frac{1}{6} k\big(j_1 + 2j_3\big)$

Οι αντιδράσεις του φορέα για μοναδιαία φόρτιση προσδιορίζονται από τις ίδιες εξισώσεις που χρησιμοποιήθηκαν κατά την προηγηθείσα ανάλυση για τη συνολική φόρτιση (Εξ. 1 έως 5):

$$\circlearrowleft \Sigma M_5^{\text{κάτω}} = 0 \;\Rightarrow\; \bar{R}_{7x} \cdot 4\,\text{m} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\bar{R}_{7x} = 0\,\text{kN}} \tag{8}$$

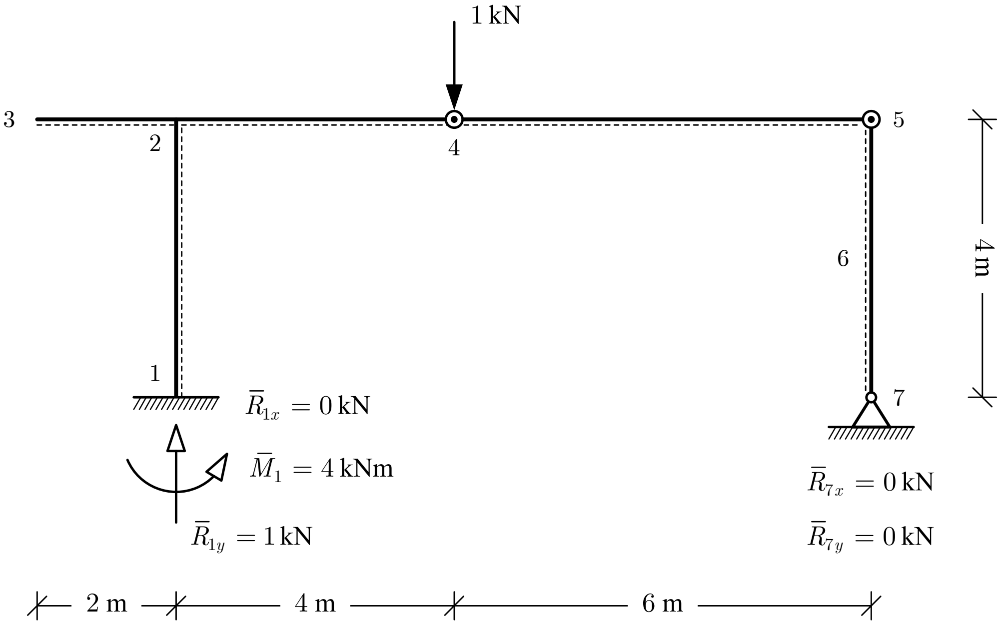
$$\circlearrowleft \Sigma M_4^{\text{δεξιά}} = 0 \;\Rightarrow\; \bar{R}_{7y} \cdot 6\,\text{m} + \bar{R}_{7x} \cdot 4\,\text{m} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\bar{R}_{7y} = 0\,\text{kN}} \tag{9}$$

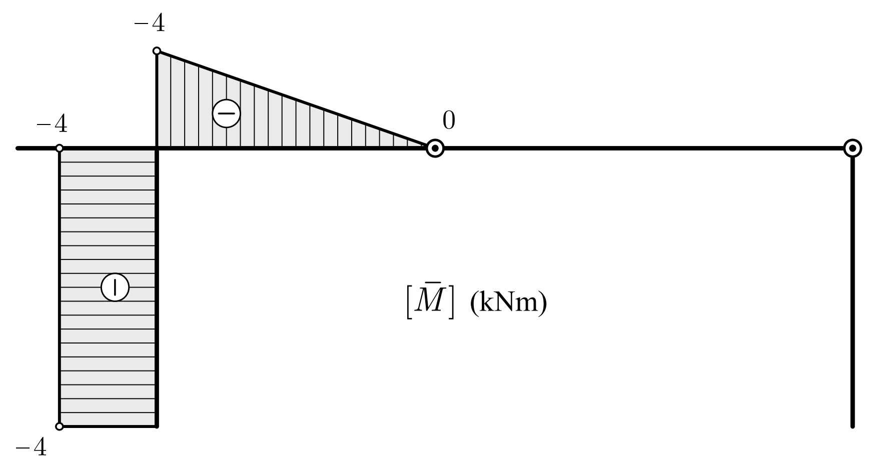
$$\Sigma F_x = 0 \;\Rightarrow\; \bar{R}_{1x} + \bar{R}_{7x} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\bar{R}_{1x} = 0\,\text{kN}} \tag{10}$$

$$\Sigma F_y = 0 \;\Rightarrow\; \bar{R}_{1y} + \bar{R}_{7y} - 1\,\text{kN} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\bar{R}_{1y} = 1\,\text{kN}} \tag{11}$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_1 = 0 \;\Rightarrow\; \bar{M}_1 + \bar{R}_{7y} \cdot 10\,\text{m} - 1\,\text{kN} \cdot 4\,\text{m} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\bar{M}_1 = 4\,\text{kNm}} \tag{12}$$

<u>Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος και Καμπτικών Ροπών του φορέα για μοναδιαία φόρτιση</u>





Η βύθιση w_4 της άρθρωσης #4 υπολογίζεται από την Εξ.(7):

$$w_4 \cdot 1\,\text{kN} = \frac{1}{EI}\left(\int_0^{\ell} M\bar{M}dx\right) = \frac{1}{EI}\underbrace{\int_0^4 M\bar{M}dx}_{\text{μέλος 1-2}} + \frac{1}{EI}\underbrace{\int_0^4 M\bar{M}dx}_{\text{μέλος 2-4}}$$

$$= \frac{1}{EI}\underbrace{\left(\text{τραπέζιο στο 1-2, διάγραμμα M}\right)\times\left(\text{ορθογώνιο στο 1-2, διάγραμμα }\bar{\text{M}}\right)}_{\textit{υπολογίζεται από τη σχέση στο κελί (2,1) του πίνακα}}$$

$$+\frac{1}{EI}\underbrace{\left(\text{παραβολή στο 2-4, διάγραμμα M}\right)\times\left(\text{τρίγωνο στο 2-4, διάγραμμα }\bar{\text{M}}\right)}_{\textit{υπολογίζεται από τη σχέση στο κελί (3,2) του πίνακα}}$$

$$= \frac{1}{EI}\,4\,\text{m}\cdot\frac{1}{2}\left(-4\,\text{kNm}\right)\left[\left(-200\right)+\left(-360\right)\right]\text{kNm}$$

$$+\frac{1}{EI}\,4\,\text{m}\cdot\frac{1}{6}\left(-4\,\text{kNm}\right)\left[\left(-400\right)+2\left(-160\right)\right]\text{kNm} \tag{13}$$

Η ροπή αδράνειας I υπολογίζεται από τις διαστάσεις της ορθογωνικής διατομής των μελών:

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.3\cdot 0.4^3}{12}\text{m}^4 = 16\cdot 10^{-4}\ \text{m}^4 \tag{14}$$

Συνεπώς, από την Εξ. (13) προκύπτει η τιμή της ζητούμενης μετατόπισης:

$$w_4 = \frac{1}{EI}\left(-8\right)\left(-560\right)\text{kNm}^3 + \frac{1}{EI}\frac{1}{3}\left(-8\right)\left(-720\right)\text{kNm}^3$$

$$= \frac{1}{EI}\left(8\right)\left(800\right)\text{kNm}^3 = \frac{6400}{\left(2\times 10^8\ \text{kN/m}^2\right)\left(16\cdot 10^{-4}\ \text{m}^4\right)}\text{kNm}^3$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{w_4 = 0.02\,\text{m} = 2\,\text{cm}} \tag{15}$$

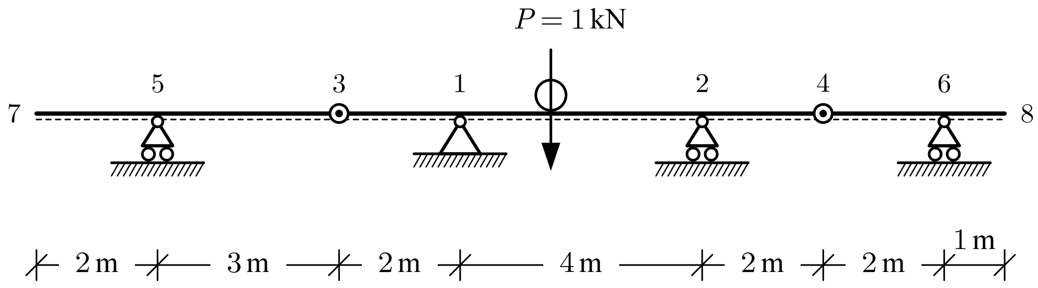
ΘΕΜΑ 3ο (25%)

Για τη συνεχή δοκό του σχήματος να σχεδιασθούν οι γραμμές επιρροής:

(α) των αντιδράσεων στις στηρίξεις #1 και #5,

(β) της τέμνουσας δύναμης στο μέσον του τμήματος 1-2 και

(γ) της καμπτικής ροπής στη στήριξη #1.



Επίλυση:

Κεντρικό τμήμα της ανάλυσης για τον προσδιορισμό των γραμμών επιρροής που ζητούνται, είναι η δοκός 3-1-2-4, η οποία στηρίζεται αυτόνομα στους κόμβους #1 και #2. Οι δοκοί 7-5-3 και 4-6-8 εξαρτώνται από τη κεντρική δοκό 3-1-2-4.

1. Γραμμή επιρροής της αντίδρασης R_{1y} στη στήριξη #1:

Για μοναδιαία δύναμη στον κόμβο #1 θα είναι $R_{1y}(\#1) = 1\,\mathrm{kN}$, ενώ για δύναμη στον κόμβο #2 η αντίδραση στη στήριξη #1 θα γίνει $R_{1y}(\#2) = 0\,\mathrm{kN}$. Οι τιμές αυτές διαμορφώνουν το ευθύγραμμο διάγραμμα μεταξύ των κόμβων #1 και #2 και στη συνέχεια προεκτείνοντας το διάγραμμα προς τα άκρα της δοκού 3-1-2-4, δηλαδή προς τους κόμβους #3 και #4, προσδιορίζονται από όμοια τρίγωνα οι τιμές, $R_{1y}(\#3) = 1.5\,\mathrm{kN}$ και $R_{1y}(\#4) = -0.5\,\mathrm{kN}$, αντίστοιχα. Στη συνέχεια εξετάζεται η περίπτωση κατά την οποία το μοναδιαίο φορτίο βρίσκεται πάνω στην στήριξη #5, όπου τότε είναι προφανώς $R_{1y}(\#5) = 0\,\mathrm{kN}$, καθώς και η περίπτωση με το μοναδιαίο φορτίο να έχει τοποθετηθεί στον κόμβο #6 και όπου πάλι είναι $R_{1y}(\#6) = 0\,\mathrm{kN}$. Έτσι, έχοντας προσδιορίσει δύο τιμές της γραμμής επιρροής της αντίδρασης R_{1y} στο τμήμα της δοκού 7-5-3, τις $R_{1y}(\#5) = 0\,\mathrm{kN}$ και $R_{1y}(\#3) = 1.5\,\mathrm{kN}$ με τις οποίες ορίζεται το ευθύγραμμο διάγραμμα για ολόκληρο το τμήμα 7-5-3 και από όμοια τρίγωνα υπολογίζεται η τιμή $R_{1y}(\#7) = -1\,\mathrm{kN}$ που αντιστοιχεί σε μοναδιαίο φορτίο στον κόμβο #7. Όμοια, αντιμετωπίζεται και η δοκός 4-6-8 για την οποία έχουν προσδιορισθεί οι τιμές $R_{1y}(\#4) = -0.5\,\mathrm{kN}$ και $R_{1y}(\#6) = 0\,\mathrm{kN}$, οπότε προεκτείνοντας την ευθεία που τις ενώνει βρίσκεται η τιμή της αντίδρασης $R_{1y}(\#8) = 0.25\,\mathrm{kN}$, η οποία αντιστοιχεί σε μοναδιαίο φορτίο στον κόμβο #8.

2. Γραμμή επιρροής της αντίδρασης R_{5y} στη στήριξη #5:

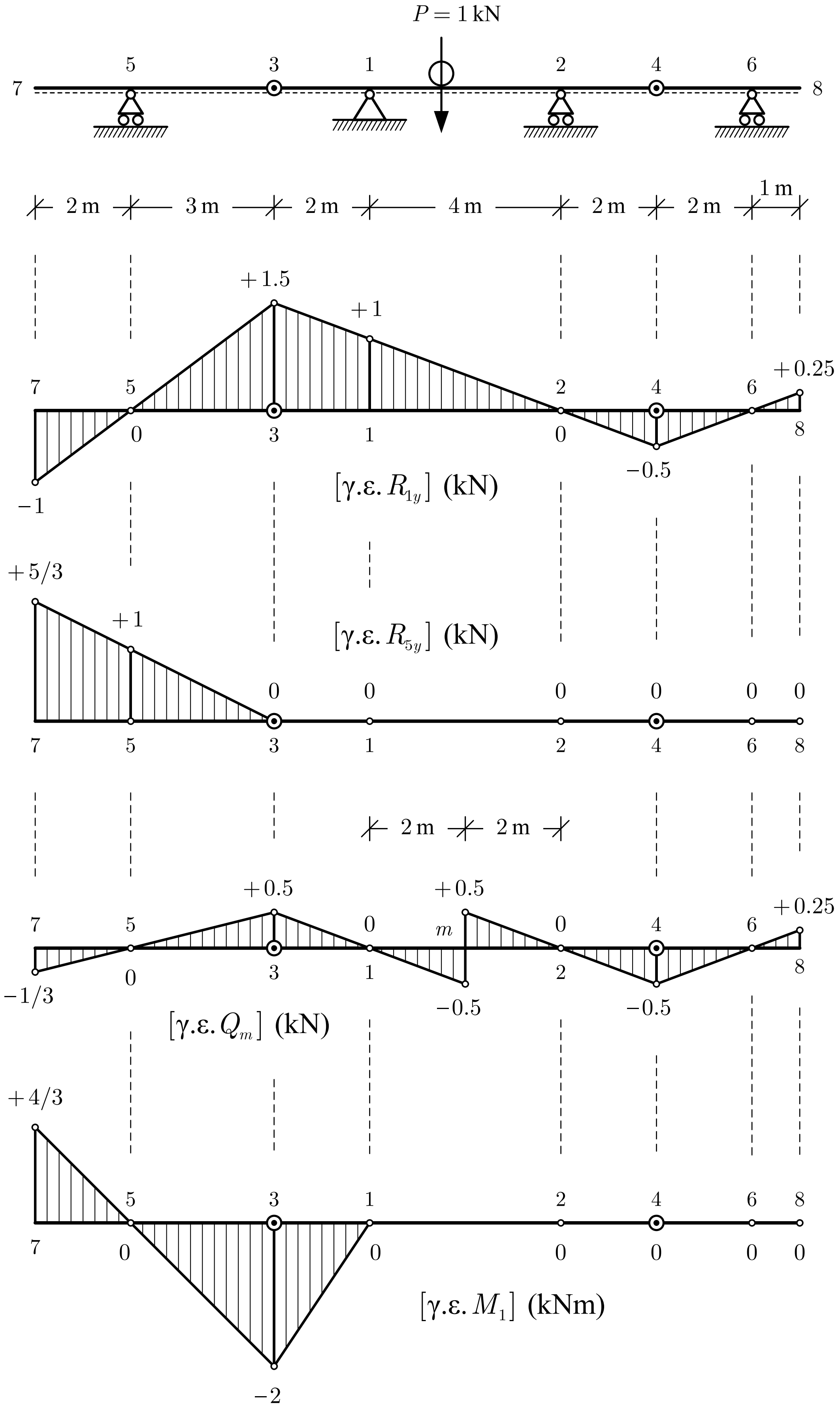
Για μοναδιαία δύναμη στους κόμβους #1, #2 και #6, οι αντίστοιχες αντιδράσεις στη στήριξη #5 θα είναι $R_{5y}(\#1) = 0\,\mathrm{kN}$, $R_{5y}(\#2) = 0\,\mathrm{kN}$ και $R_{5y}(\#6) = 0\,\mathrm{kN}$, ενώ για φορτίο στον κόμβο #5 η αντίδραση στην στήριξη του κόμβου αυτού θα γίνει $R_{1y}(\#5) = 1\,\mathrm{kN}$. Επομένως, ακολουθώντας ίδια λογική με αυτή της γραμμής επιρροής της αντίδρασης στον κόμβο #1, οι τιμές που βρέθηκαν διαμορφώνουν μηδενικό διάγραμμα για το τμήμα 1-2 και προεκτείνοντάς το μέχρι τα άκρα της δοκού 3-1-2-4 θα προκύψουν μηδενικές επίσης τιμές στους κόμβους #3 και #4. Εξετάζοντας, στη συνέχεια, την περίπτωση που το μοναδιαίο φορτίο βρίσκεται στη στήριξη #5, η αντίδραση θα είναι $R_{5y}(\#5) = 1\,\mathrm{kN}$ και συνεπώς, διαθέτοντας δύο τιμές της γραμμής επιρροής για τη δοκό 7-5-3, τις $R_{5y}(\#5) = 1\,\mathrm{kN}$ και $R_{5y}(\#3) = 0\,\mathrm{kN}$, ορίζεται το ευθύγραμμο διάγραμμα το τμήμα 7-5-3 και μέσω αυτού με όμοια τρίγωνα προσδιορίζεται η τιμή $R_{5y}(\#7) = 5/3\,\mathrm{kN}$ για φορτίο στον κόμβο #7. Με ίδιο τρόπο αντιμετωπίζεται η δοκός 4-6-8 για την οποία έχουν υπολογισθεί οι τιμές $R_{5y}(\#4) = 0\,\mathrm{kN}$ και $R_{5y}(\#6) = 0\,\mathrm{kN}$, οπότε προεκτείνοντας το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από αυτές έως το άκρο #8, βρίσκεται η τιμή $R_{5y}(\#8) = 0\,\mathrm{kN}$, που αναφέρεται σε μοναδιαίο φορτίο στον κόμβο #8.

3. Γραμμή επιρροής της τέμνουσας δύναμης Q_m στο μέσον m του τμήματος 1-2:

Στην περίπτωση αυτή μορφώνεται, κατ' αρχήν, το διάγραμμα για μοναδιαίο φορτίο στο διάστημα 1-2, το οποίο είναι αυτό της αμφιερείστου δοκού. Προεκτείνοντας τα ευθύγραμμα τμήματα του διαγράμματος προς τα άκρα #3 και #4 της δοκού 3-1-2-4, υπολογίζονται από όμοια τρίγωνα οι τιμές της τέμνουσας δύναμης $Q_m(\#3) = 0.5\,\mathrm{kN}$ και $Q_m(\#4) = -0.5\,\mathrm{kN}$, που οφείλονται σε μοναδιαίο φορτίο στους κόμβους #3 και #5, αντίστοιχα. Για τις ακραίες δοκούς ακολουθείται η ίδια διαδικασία με αυτή των προηγουμένων περιπτώσεων, δηλαδή με γνωστές τις τιμές στους κόμβους των αρθρώσεων #3 και #4 και δεδομένο ότι η τέμνουσα δύναμη παίρνει τις τιμές $Q_m(\#5) = 0\,\mathrm{kN}$ και $Q_m(\#6) = 0\,\mathrm{kN}$ όταν η δύναμη βρεθεί στους κόμβους των στηρίξεων #5 και #6, ορίζονται τα ευθύγραμμα διαγράμματα για τα τμήματα 7-5-3 και 4-6-8. Από όμοια τρίγωνα υπολογίζονται οι τιμές στα άκρα $Q_m(\#7) = -1/3\,\mathrm{kN}$ και $Q_m(\#8) = 0.25\,\mathrm{kN}$ για μοναδιαίο φορτίο στους κόμβους #7 και #8, αντίστοιχα.

4. Γραμμή επιρροής της καμπτικής ροπής M_1 στη στήριξη #1:

Στην περίπτωση αυτή όπως και στις προηγούμενες, εξετάζεται πρώτα η γραμμή επιρροής για μοναδιαίο φορτίο στο διάστημα 1-2. Για οποιαδήποτε θέση x του φορτίου στο διάστημα αυτό, η ροπή στον κόμβο #1 θα είναι μηδενική, $M_1(x) = 0\,\mathrm{kNm}$. Όταν το φορτίο κινηθεί στο διάστημα 2-4 θα είναι πάλι μηδενική η ροπή στον κόμβο #1 και θα συνεχίσει να είναι για οποιαδήποτε θέση του φορτίου από τον κόμβο #4 έως και τον #8. Όταν το μοναδιαίο φορτίο βρίσκεται στο τμήμα 3-1, θα δημιουργείται ροπή στον κόμβο #1, η οποία είναι ανάλογη της απόστασης του φορτίου από τον κόμβο #1 και όταν αυτό βρεθεί στο άκρο #3 θα έχει τιμή $M_1(\#3) = 2\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{kN} = 2\,\mathrm{kNm}$. Για την ακραία δοκό 7-5-3 ακολουθείται η λογική που εφαρμόστηκε στις προηγούμενες περιπτώσεις, δηλαδή με γνωστή την τιμή στην άρθρωση #3 και δεδομένο ότι η καμπτική ροπή στον κόμβο #1 μηδενίζεται $M_1(\#5) = 0\,\mathrm{kNm}$ όταν η μοναδιαία δύναμη βρεθεί στη στήριξη #5, ορίζεται το ευθύγραμμο διάγραμμα για το τμήμα 5-3. Προεκτείνοντας αυτό προς τον κόμβο #7 και χρησιμοποιώντας όμοια τρίγωνα στο ακραίο τμήμα, υπολογίζεται η τιμή $M_1(\#7) = 4/3\,\mathrm{kNm}$ για μοναδιαίο φορτίο στον κόμβο #7.


$P = 1\,\mathrm{kN}$
7 5 3 1 2 4 6 8
2 m 3 m 2 m 4 m 2 m 2 m 1 m
+1.5
+1
+0.25
−1
−0.5
$[\gamma.\varepsilon.\, R_{1y}]$ (kN)
+5/3
+1
$[\gamma.\varepsilon.\, R_{5y}]$ (kN)
2 m 2 m
+0.5
+0.5
+0.25
m
−1/3
−0.5
−0.5
$[\gamma.\varepsilon.\, Q_m]$ (kN)
+4/3
−2
$[\gamma.\varepsilon.\, M_1]$ (kNm)